Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2012. március 10.

XII. OSZTÁLY

1. feladat. Adottak az a, b és c páronként különböző szigorúan pozitív valós számok. Számítsd ki a következő határértéket:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\,\mathrm{d}x.$$

2. feladat. Adott a 9 elemű $(A,+,\cdot)$ gyűrű. Igazold, hogy a következő állítások ekvivalensek:

(a) Bármely $x\in A\setminus\{0\}$ esetén léteznek az $a\in\{-1,0,1\}$ és $b\in\{-1,1\}$ számok úgy, hogy $x^2+ax+b=0$.

(b) $(A,+,\cdot)$ test.

3. feladat. Az n elemű G véges csoport semleges eleme e. Határozd meg az összes olyan $f:G\to\mathbb{N}^*$ függvényt, amely egyidejűleg teljesíti a következő két feltételt:

(a) $f(x)=1$ akkor és csakis akkor, ha $x=e$;

(b) $f(x^k)=\dfrac{f(x)}{(f(x),k)}$, az n szám bármely k természetes szám osztója esetén, ahol (r,s) az r és s természetes számok legnagyobb közös osztója.

Gazeta Matematică

4. feladat. Adott az $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ deriválható függvény úgy, hogy $f(0)=f(1)=0$ és $|f'(x)|\le 1$, bármely $x\in[0,1]$ esetén. Igazold, hogy:

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{1}{4}.$$

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.